Teoría de Juegos

Sesión 2

Alejandro Lugon

Departamento de Economía
PUCP

alugon@pucp.edu.pe

2023-1

ESQUEMA DE LA SESIÓN

- Juegos en forma estratégica
  - Introducción
  - Marco de juego
  - Pagos
  - Forma estratégica
  - Dominación
  - Equilibrio por dominación
  - Eliminación de estrategias dominadas
  - Equilibrio de Nash

- Empecemos considerando el juego de YKP: dos jugadores, simultáneamente cada uno elige entre Tijera, Piedra o Papel. Hay tres resultados posibles Ganar, Perder o Empatar de acuerdo a la regla Tijera le gana a Papel que le gana Piedra que le gana a Tijera.

⊙ Podemos representar este juego por medio de una matriz, asignando a un jugador las filas y al otro las columnas:

		Rojo		
		Ti	Pi	Pa
Azul	Ti	Empate	Gana Rojo	Gana Azul
	Pi	Gana Azul	Empate	Gana Rojo
	Pa	Gana Rojo	Gana Azul	Empate

⊙ Hay que ser preciso en lo llamamos "resultado" del juego. Este resultado puede no ser solo la situación final a la que se llega, puede incluir el camino por el que se llega.

- Hay que ser preciso en lo llamamos "resultado" del juego. Este resultado puede no ser solo la situación final a la que se llega, puede incluir el camino por el que se llega.
- En el YKP los resultados posibles pueden ser, en un caso, 3:

Empate, Gana Rojo y Gana Azul

- Pero también podrían ser 9:

Empate con (Ti ,Ti), Gana Rojo con (Ti ,Pi), Gana Azul con (Ti ,Pa),

Gana Azul con (Pi ,Ti), Empate con (Pi ,Pi), Gana Rojo con (Pi ,Pa),

Gana Rojo con (Pa ,Ti),Gana Azul con (Pa ,pi), Empate con (Pa ,Pa).

Definición (Marco de Juego en forma estratégica(normal))

Definition 2.1.1 A *game-frame in strategic form* is a list of four items (a quadruple) $\langle I, (S_1, S_2, ..., S_n), O, f \rangle$ where:

- $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ is a set of *players* ($n \geq 2$).
- $(S_1, S_2, \ldots, S_n)$ is a list of sets, one for each player. For every Player $i \in I$, S_i is the set of *strategies* (or possible choices) of Player i. We denote by S the Cartesian product of these sets: $S = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$; thus an element of S is a list $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ consisting of one strategy for each player. We call S the set of *strategy profiles*.
- O is a set of *outcomes*.
- $f : S \to O$ is a function that associates with every strategy profile s an outcome $f(s) \in O$.

- El marco de juego del YKP sería:¿
  1. $I = \{1, 2\}$
  2. $S_1 = S_2 = \{Ti, Pi, Pa\}$
  3. $O = \{\text{Gana 1, Gana 2 , Empate}\}$
  4. $f : S_1 \times S_2 \longrightarrow O$ dada por:
     $f(Ti, Ti) = f(Pi, Pi) = f(Pa, Pa) = \text{Empate}$
     $f(Ti, Pa) = f(Pi, Ti) = f(Pa, Pi) = \text{Gana 1}$
     $f(Pi, Pa) = f(Pa, Ti) = f(Ti, Pi) = \text{Gana 2}$

- El juego marco define todas las partes de un juego que no dependen de las preferencias de los jugadores.

⊙ Si especificamos las preferencias de cada jugador sobre los resultados tendremos un juego en forma estratégica (o normal):

$$\langle I, (S_1, \ldots S_n), O, f, (\succcurlyeq_1, \cdots \succcurlyeq_n) \rangle$$

⊙ Recordemos que las preferencias son completas y transitivas y que si son continuas (o si O es finito) pueden representarse por una (gran familia de) funciones de utilidad

⊙ Si tomamos para cada jugador i una función de utilidad U_i y definimos la **función pago** $\pi_i : S \longrightarrow \mathbb{R}$ como la composición $\pi_i(s) = U_i(f(s))$
$S = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$

Definition 2.1.3 An *ordinal game in strategic form* is a quintuple $\langle I, (S_1, \ldots, S_n), O, f, (\succsim_1, \ldots, \succsim_n) \rangle$ where:

- $\langle I, (S_1, \ldots, S_n), O, f \rangle$ is a game-frame in strategic form (Definition 2.1.1) and
- for every Player $i \in I$, $\succsim_i$ is a complete and transitive ranking of the set of outcomes O.

If we replace each ranking $\succsim_i$ with a utility function U_i that represents it, and we assign, to each strategy profile s, Player i's utility of $f(s)$ (recall that $f(s)$ is the outcome associated with s) then we obtain a function $\pi_i : S \to \mathbb{R}$ called Player i's *payoff function*. Thus $\pi_i(s) = U_i(f(s))$.[a] Having done so, we obtain a triple $\langle I, (S_1, \ldots, S_n), (\pi_1, \ldots, \pi_n) \rangle$ called a *reduced-form ordinal game in strategic form* ('reduced-form' because some information is lost, namely the specification of the possible outcomes).

- **Forma normal reducida**:

$$\langle I, (S_1, \ldots S_n), (\pi_1, \ldots \pi_n) \rangle$$

- En nuestro juego de YKP si suponemos que para ambos jugadores

$$\text{ganar} \succ \text{empatar} \succ \text{perder}$$

$\wr$ podemos asignar a los resultados números decrecientes que representen esta preferencias, $\wr$ por ejemplo 1 a ganar, 0 a empatar y -1 a perder, para ambos jugadores.

$\odot$ Con esto la forma normal reducida está dada por la matriz:

	Ti	Pi	Pa
Ti	0,0	-1,1	1,-1
Pi	1,-1	0,0	-1,1
Pa	-1,1	1,-1	0,0

donde en cada casilla correspondiente a la fila s_i y la columna s_j hemos puesto los pagos en orden $\pi_1(s_i, s_j), \pi_2(s_i, s_j)$

- Para el Dilema del Prisionero tenemos el marco:⟅
  1. $I = \{1, 2\}$
  2. $S_1 = S_2 = \{Conf,\ Call\}$
  3. $O = \{(6,6), (0,9), (9,0), (1,1)\}$ (Donde cada par indica el número de meses que pasará cada jugador en prisión.
  4. $f : S_1 \times S_2 \longrightarrow O$ dada por: $f(Conf, Conf) = (6,6)$
     $f(Conf, Call) = (0,9)$ $f(Call, Conf) = (9,0)$ $f(Call, Call) = (1,1)$

⊙ Si, como es usual, asumimos que lo único que le importa a cada jugador es pasar el menor tiempo posible en prisión, las preferencias son:

$$(0,9) \succ_1 (1,1) \succ_1 (6,6) \succ_1 (9,0)$$

$$(9,0) \succ_2 (1,1) \succ_2 (6,6) \succ_2 (0,9)$$

con ellas ya tenemos un juego

- Si damos las funciones de utilidad sobre los resultados para cada jugador como $u_i(o_1, o_2) = 12 - o_i$, la forma normal reducida está representada en la matriz:

	Conf	Call
Conf	6,6	12,3
Call	3,12	11,11

⊙ Esta forma normal depende de las preferencias que hemos asumido.

⊙ Las preferencias podrían ser lexícográficas: Call es preferido a Conf sin importar el tiempo en prisión, pero en dos resultados con igual acción se prefiere el menor tiempo en prisión.¿

- ¿Cómo sería la forma normal con ambos jugadores con estas preferencias?
- ¿Cómo sería la forma normal con un jugador con estas preferencias y el otro con las preferencias originales?

- En la forma normal del dilema del prisionero:

	Conf	Call
Conf	6,6	12,3
Call	3,12	11,11

observamos que (para ambos jugadores) el pago de Conf es , sin importar lo que haga el otro, mayor que el pago de Call

- En este caso decimos que Conf **domina estrictamente** a Call

- En una forma normal del juego de *Golden Balls*:

	Split	Steal
Split	50,50	0,100
Steal	100,0	0,0

observamos que (para ambos jugadores) el pago de Steal es en un caso mayor que el pago de Split y en otro igual

⊙ En este caso decimos que Steal **domina débilmente** a Split.

Definition 2.2.1 Given an ordinal game in strategic form, let i be a Player and a and b two of her strategies ($a, b \in S_i$). We say that, for Player i,

- *a strictly dominates b* (or *b is strictly dominated by a*) if, in every situation (that is, no matter what the other players do), a gives Player i a payoff which is *greater* than the payoff that b gives. Formally: for every $s_{-i} \in S_{-i}$, $\pi_i(a, s_{-i}) > \pi_i(b, s_{-i})$.[a]
- *a weakly dominates b* (or *b is weakly dominated by a*) if, in every situation, a gives Player i a payoff which is *greater than or equal to* the payoff that b gives and, furthermore, there is at least one situation where a gives a greater payoff than b. Formally: for every $s_{-i} \in S_{-i}$, $\pi_i(a, s_{-i}) \geq \pi_i(b, s_{-i})$ and there exists an $\overline{s}_{-i} \in S_{-i}$ such that $\pi_i(a, \overline{s}_{-i}) > \pi_i(b, \overline{s}_{-i})$.[b]
- *a is equivalent to b* if, in every situation, a and b give Player i the *same* payoff. Formally: for every $s_{-i} \in S_{-i}$, $\pi_i(a, s_{-i}) = \pi_i(b, s_{-i})$.[c]

⊙ Notemos que si a domina estrictamente a b, entonces a domina débilmente a b. Algunas veces dominar débilmente se entiende por dominar débilmente pero no estrictamente (si! es ambiguo).

- Las relaciones de dominación que hemos visto son entre dos estrategias del mismo jugador.

⊙ En algunos casos se tiene UNA estrategia que domina a TODAS las demás:

> **Definition 2.2.2** Given an ordinal game in strategic form, let i be a Player and a one of her strategies ($a \in S_i$). We say that, for Player i,
>
> - a is a *strictly dominant* strategy if a strictly dominates every other strategy of Player i.
> - a is a *weakly dominant* strategy if, for every other strategy x of Player i, one of the following is true: either (1) a weakly dominates x or (2) a is equivalent to x.

⊙ Si a es una estrategia estrictamente dominante, entonces a es una estrategia débilmente dominante.

⊙ Una estrategia estrictamente dominante es única. Puede no existir, pero si existe solo hay una.

⊙ Puede haber más de dos estrategias débilmente dominantes, en ese caso todas son equivalentes.

- El primer concepto de solución que veremos será el más robusto (pero el menos aplicable), basado en dominación.

⊙ Si un jugador tiene una estrategia estrictamente dominante, no hay ninguna razón para que no la elija.

⊙ Si un jugador tiene una estrategia débilmente dominante, esta es una elección "de seguridad", (aunque en algún caso podría ser lo mismo escoger otra, nunca sería mejor)

Definition 2.2.3 Given an ordinal game in strategic form, let $s = (s_1, \ldots, s_n)$ be a strategy profile. We say that

- s is a *strictly dominant-strategy equilibrium* if, for every Player i, s_i is a strictly dominant strategy.
- s is a *weakly dominant-strategy equilibrium* if, for every Player i, s_i is a weakly dominant strategy and, furthermore, for at least one Player j, s_j is not a strictly dominant strategy.

Dilema del prisionero

- El dilema del prisionero:

	Conf	Call
Conf	6,6	12,3
Call	3,12	11,11

tiene un equilibrio en estrategias estrictamente dominantes: $(Conf, Conf)$

Golden Balls

- El juego de *Golden Balls*:

	Split	Steal
Split	50,50	0,100
Steal	100,0	0,0

tiene un equilibrio en estrategias débilmente dominantes: $(Steal, Steal)$

Subasta al segundo precio

- N postores apuntan en un sobre cerrado su oferta de pago monetario por cierto objeto.

⊙ El dueño del objeto abre los N sobres y otorga el objeto al que hizo la oferta mayor. En caso de empate el objeto lo obtiene el postor de mayor índice.

⊙ El postor que obtiene el objeto paga por él la segunda mayor oferta. Los otros postores no obtienen ni pagan nada.

⊙ Asumimos que cada postor i valora el objeto en v_i unidades monetarias. Prefiere llevarse el objeto pagando lo menos posible por debajo de v_i a no llevárselo y no llevárselo a llevárselo pagando más que v_i. Es indiferente entre llevarse el objeto pagando v_i y no llevárselo.

Subasta al segundo precio

- En el caso con $N = 2$, podemos usar la función de utilidad:

$$U_1(s_1, s_2) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad s_1 \leq s_2 \\ v_1 - s_2 & \text{si} \quad s_1 > s_2 \end{cases}$$

$$U_2(s_1, s_2) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad s_2 < s_1 \\ v_2 - s_1 & \text{si} \quad s_2 \geq s_1 \end{cases}$$

- Supongamos que las ofertas que pueden ser hechas son 10, 20, 30 40 o 50 para ambos jugadores y que $v_1 = 30$ y $v_2 = 20$.

⊙ La forma normal reducida es:

	10	20	30	40	50
10	$0, 10$	$0, 10$	$0, 10$	$0, 10$	$0, 10$
20	$10, 0$	$0, 0$	$0, 0$	$0, 0$	$0, 0$
30	$20, 0$	$10, 0$	$0, -10$	$0, -10$	$0, -10$
40	$20, 0$	$10, 0$	$0, 0$	$0, -20$	$0, -20$
50	$20, 0$	$10, 0$	$0, 0$	$-10, 0$	$0, -30$

Subasta al segundo precio

- En la forma normal:

	10	20	30	40	50
10	$0, 10$	$0, 10$	$0, 10$	$0, 10$	$0, 10$
20	$10, 0$	$0, 0$	$0, 0$	$0, 0$	$0, 0$
30	$20, 0$	$10, 0$	$0, -10$	$0, -10$	$0, -10$
40	$20, 0$	$10, 0$	$0, 0$	$0, -20$	$0, -20$
50	$20, 0$	$10, 0$	$0, 0$	$-10, 0$	$0, -30$

- Vemos que para el postor 1, 30 y 40 son estrategias débilmente dominantes y para el postor 2, 10 y 20 son estrategias dominantes.

⊙ En particular el perfil de estrategias donde cada postor ofrece su valoración, $(30, 20)$, es un equilibrio en estrategias débilmente dominantes. El postor con la mayor valoración obtiene el objeto.

• La mayoría de juegos no tienen equilibrio en estrategias (débilmente) dominantes, es necesario tener un concepto de solución más general, aunque sea menos robusto.

⊙ Si un jugador tiene una estrategia estrictamente dominada (por otra) no tiene ninguna razón para escogerla.¿ Cualquier razón serviría para elegir a la que la domina (**no** estamos diciendo que va a ser así)

⊙ Pero si podemos eliminar de la búsqueda de una solución a toda estrategia estrictamente dominada.

- Un jugador con una estrategia estrictamente dominada no la va a eligir
- Los otros jugadores saben esto y por lo tanto no toman en cuenta esta estrategia

- Al eliminar estrategias estrictamente dominadas, el juego se reduce a uno con menos estrategias$\wr$, y en el juego reducido pueden surgir nuevas dominaciones estrictas$\wr$, si las eliminamos obtenemos un nuevo juego reducido.

$\odot$ Podemos seguir este proceso hasta que no tengamos ninguna dominación estricta entre estrategias.

$\odot$ Al proceso que hemos descrito se le conoce como Eliminación Iterada de Estrategias Estrictamente Dominadas (EIEED = IDSDS)

$\odot$ En el caso en que la EIEED de como resultado un juego con una estrategia para cada jugador, llamaremos al perfil formado por esas estrategias **Equilibrio por EIEED**

Proposición

1. *El resultado de la EIEED no depende del "camino seguido"*
2. *Si un juego tiene un equilibrio en estrategias estrictamente dominantes, entonces ese perfil de estrategias es también el equilibrio por EIEED.*

⊙ El primer punto nos dice que el procedimiento de EIEED es robusto

⊙ El segundo punto nos dice que el equilibrio por EIEED es una ampliación del equilibrio en estrategias estrictamente dominantes

- También se puede realizar la eliminación iterada de estrategias débilmente dominadas (EIEDD = IDWDS)
  - Pero este procedimiento no es robusto ni seguro.
  - Depende de la secuencia (el orden) en que se eliminan las estrategias.
  - Puede eliminar estrategias que SI podrían ser jugadas...

Competencia en precios

- Dos empresas pueden cobrar por sus productos 38,39,40,41 o 42 soles
- Si las dos cobran 42 soles cada una venderá 2,000 unidades
- Si una de ellas, y la otra no, baja un sol su precio ganará 100 clientes y la otra perderá 80 clientes.
- Si las dos bajan su precio un sol, cada una obtendrá 20 clientes nuevos.
- El costo de cada producto es de 20 soles.

Competencia en precios

	38	39	40	41	42
38	37.44 , 37.44	38.88 , 37.62	40.32 , 37.60	41.76 , 37.38	43.20 , 36.96
39	37.62 , 38.88	39.14 , 39.14	40.66 , 39.20	42.18 , 39.06	43.70 , 38.72
40	37.60 , 40.32	39.20 , 40.66	40.80 , 40.80	42.43 , 40.74	44.00 , 40.48
41	37.38 , 41.76	39.06 , 42.18	40.74 , 42.43	42.42 , 42.42	44.10 , 42.24
42	36.96 , 43.20	38.72 , 43.70	40.48 , 44.00	42.24 , 44.10	44.00 , 44.00

Podemos eliminar 38 y 42 para ambos jugadores:

	39	40	41
39	39.14 , 39.14	40.66 , 39.20	42.18 , 39.06
40	39.20 , 40.66	40.80 , 40.80	42.43 , 40.74
41	39.06 , 42.18	40.74 , 42.43	42.42 , 42.42

y luego 39 y 41:

	40
40	40.80 , 40.80

- No todos los juegos se pueden "resolver" por eliminación de estrategias dominadas.
- Debemos tener un concepto de solución más amplio en su aplicación.
- Este concepto es el **Equilibrio de Nash**

Definición (Equilibrio de Nash)

Un perfil de estrategias es un Equilibrio de Nash si ningún jugador puede mejorar su pago actuando unilateralmente.

- Para un juego con dos jugadores:

Definition 2.6.1 Given an ordinal game in strategic form with two players, a strategy profile $s^* = (s_1^*, s_2^*) \in S_1 \times S_2$ is a Nash equilibrium if the following two conditions are satisfied:

1. for every $s_1 \in S_1$, $\pi_1(s_1^*, s_2^*) \geq \pi_1(s_1, s_2^*)$ (or stated in terms of outcomes and preferences, $f(s_1^*, s_2^*) \succsim_1 f(s_1, s_2^*)$), and
2. for every $s_2 \in S_2$, $\pi_2(s_1^*, s_2^*) \geq \pi_2(s_1^*, s_2)$ (or, $f(s_1^*, s_2^*) \succsim_2 f(s_1^*, s_2)$).

- Para un juego con n jugadores:

Definition 2.6.2 Given an ordinal game in strategic form with n players, a strategy profile $s^* \in S$ is a Nash equilibrium if the following n inequalities are satisfied: for every Player $i = 1, \ldots, n$,

$$\pi_i(s^*) \geq \pi_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*) \text{ for all } s_i \in S_i.$$

Mejores Respuestas

Definición (Mejor Respuesta)

Si fijamos las estrategias de los otros jugadores, la mejor respuesta de un jugador a ese perfil es la estrategia que le da el mayor pago.

Definition 2.6.3 Consider an ordinal game in strategic form, a Player i and a strategy profile $\overline{s}_{-i} \in S_{-i}$ of the players other than i. A strategy $s_i \in S_i$ of Player i is a *best reply* (or *best response*) to $\overline{s}_{-i}$ if $\pi_i(s_i, \overline{s}_{-i}) \geq \pi_i(s_i', \overline{s}_{-i})$, for every $s_i' \in S_i$.

ζ

Definición (Equilibrio de Nash)

Un perfil de estrategias es un Equilibrio de Nash si cada jugador elige una mejor respuesta a lo que eligen los otros.

- Existen varias interpretaciones al concepto de Equilibrio de Nash¿
  1. **No arrepentimiento:** Luego de realizado el juego en un EN, ningún jugador se arrepiente de su elección.
  2. **Conjeturas correctas:** Como un jugador no sabe la elección de los otros, debe hacer una conjetura y escoger su mejor respuesta a esta conjetura. En un equilibrio de Nash, estas conjeturas son correctas.
  3. **Acuerdo autosostenido:** Si los jugadores pudieran quedar en jugar según un EN, ninguno tendría incentivo a desviarse, suponiendo que los demás también cumplen lo acordado.

- Cada una de las definiciones alternativas de EN nos da una estrategia para encontrarlo(s):

⊙ **Un perfil de estrategias es un Equilibrio de Nash si ningún jugador puede mejorar su pago actuando unilateralmente.**
Por inspección, evaluar los pagos de cada perfil de estrategias y verificar si se cumple o no la definición.

⊙ **Un perfil de estrategias es un Equilibrio de Nash si cada jugador elige una mejor respuesta a lo que eligen los otros.**
Por mejor respuesta, encontrar las mejores respuestas de cada jugador y ver en qué perfiles esta coinciden.

El dilema de los prisioneros

	Cnf	CII
Cnf	**6**,**6**	**12**,3
CII	3,**12**	11,11

- (Cnf,Cnf) es EqN

Competencia en precios

	38	39	40	41	42
38	37.44 , 37.44	38.88 , **37.62**	40.32 , 37.60	41.76 , 37.38	43.20 , 36.96
39	**37.62** , 38.88	39.14 , 39.14	40.66 , **39.20**	42.18 , 39.06	43.70 , 38.72
40	37.60, 40.32	**39.20** , 40.66	**40.80 , 40.80**	**42.43** , 40.74	44.00 , 40.48
41	37.38 , 41.76	39.06 , 42.18	40.74 , **42.43**	42.42 , 42.42	**44.10** , 42.24
42	36.96 , 43.20	38.72 , 43.70	40.48 , 44.00	42.24 , **44.10**	44.00 , 44.00

- $(40, 40)$ es EqN

Halcón-Paloma

	Pal	Hal
Pal	1,1	0,2
Hal	2,0	1-c,1-c

- Si $c < 1$:

	Hal
Hal	1-c,1-c

- Si $c > 1$:

	Pal	Hal
Pal	1,1	**0,2**
Hal	**2,0**	1-c,1-c

Juego Genérico

	$a1$	$a2$	$a3$	$a4$
$b1$	$6, 5$	$8, 10$	$7, 1$	$20, 2$
$b2$	$4, 0$	$10, 1$	$5, 0$	$10, 0$
$b3$	$2, 1$	$6, 2$	$4, 4$	$5, 3$
$b4$	$2, 0$	$4, 4$	$3, 3$	$5, 4$

- ¿Cómo se relaciona el EN con los otros conceptos de equilibrio que hemos visto?

⊙ La EIEED nunca elimina una estrategia que forma parte de algún EN

⊙ Todo EN forma parte de los perfiles que sobreviven a la EIEED.

⊙ Si la EIEED da como resultado un solo perfil, este es un EN. Aún más es el único equilibrio de Nash.

YKP y BS

- Nuestro juego de YKP

	Ti	Pi	Pa
Ti	0, 0	-1, 1	1,-1
Pi	1,-1	0, 0	-1, 1
Pa	-1, 1	1,-1	0, 0

no tiene ninguno de los equilibrios propuestos.

- El juego conocido como la batalla de los sexos

	B	S
B	$2, 1$	$0, 0$
S	$0, 0$	$1, 2$

tiene dos EN.

- En todos los juegos que hemos visto el conjunto de estrategias de los jugadores ha sido finito.

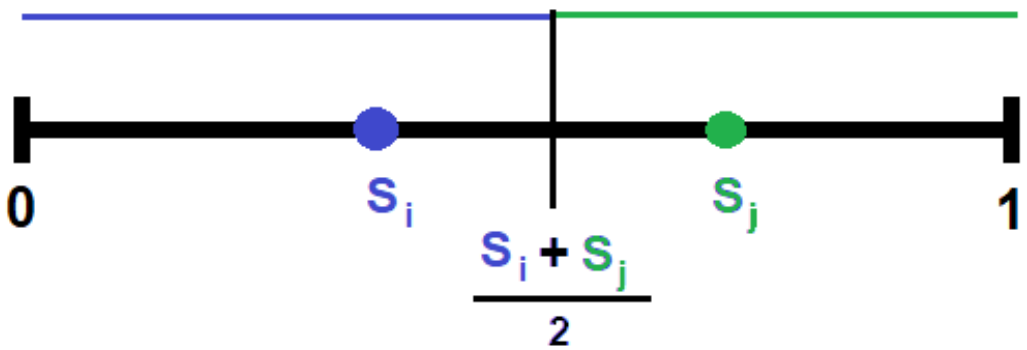
- Para juegos con un número infinito de estrategias (para al menos un jugador) casi todos los conceptos son los mismos.

- La eliminación iterada puede ser llevada a cabo, pero puede que tenga que ser una secuencia infinita y es más difícil de aceptar como solución per se (Duopolio de Cournot)

- Veamos un par de ejemplos.

Hotelling

- Dos empresas deben colocar su punto de venta en alguna posición del segmento $[0, 1]$.
- Si la empresa i se coloca en s_i y la empresa j en s_j, con $s_i < s_j$ el beneficio de cada empresa (que consideraremos su pago) es $\pi_i(s_1, s_2) = \frac{s_1+s_2}{2}$ y $\pi_j(s_1, s_2) = 1 - \frac{s_1+s_2}{2}$



- En el caso en que $s_1 = s_2$ el pago es $1/2$ para cada empresa

Hotelling

- En este juego la mejor respuesta es vacía en la mayoría de casos. Encontraremos en EN por inspección.

⊙ Un perfil donde $s_1 \neq s_2$ no puede ser EN, cualquiera de las dos empresa puede aumentar su pago acercándose a la otra.

⊙ Un perfil donde $s_1 = s_2 \neq 1/2$ no puede ser EN, cualquier empresa se pued mover hacía el lado más largo del segmento y aumentar su pago

⊙ Solo $(1/2, 1/2)$ puede ser EN (ojo, hay que verificar que realmente lo sea).

⊙ $(1/2, 1/2)$ es EN ya que cualquier empresa que se mueva tendrá un pago menor a $1/2$ que es su pago en el perfil dado.

Duopolio de Cournot

- Dos empresa compiten en el mismo mercado, cada una decide la cantidad q_i que coloca en el mercado. La cantidad total es entonces $Q = q_1 + q_2$
  - El precio lo forma la demnad inversa $P = a - bQ$
  - Cada empresa tiene una función de costos $C_i(q_i) = cq_i$ con $c < a$.
  - El pago de cada empresa es su beneficio:

$$\begin{aligned} \pi_1(q_1, q_2) &= (a - b(q_1 + q_2))q_1 - cq_1 \\ &= (a - c)q_1 - bq_1^2 - bq_1q_2 \end{aligned}$$

$$\pi_2(q_1, q_2) = (a - c)q_2 - bq_2^2 - bq_1q_2$$

Duopolio de Cournot

- Podemos encontrar la mejor respuesta de cada empresa maximizando su pago dada la cantidad de la otra.

⊙ Podemos derivar cada pago π_i , igualar a cero y despejar q_i en función de q_j. Esto nos da:

$$q_1 = MR_1(q_2) = \frac{(a-c) - bq_2}{2b}$$

$$q_2 = MR_2(q_1) = \frac{(a-c) - bq_1}{2b}$$

⊙ En EN las mejores respuestas deben coincidir, luego debe cumplirse:

$$q_1 = \frac{(a-c) - bq_2}{2b}$$

$$q_2 = \frac{(a-c) - bq_1}{2b}$$

Duopolio de Cournot

- En EN debe cumplirse:

$$q_1 = \frac{(a-c) - bq_2}{2b}$$

$$q_2 = \frac{(a-c) - bq_1}{2b}$$

⊙ Que tiene solución en:

$$q_1^* = q_2^* = \frac{a-c}{3b}$$

luego el único EN es el perfil $(\frac{a-c}{3b}, \frac{a-c}{3b})$

⊙ Este perfil también se puede encontrar EIEED, en este caso un procedimiento infinito.

Duopolio de Bertrand

- Dos empresa compiten en el mismo mercado, cada una decide el precio p_i que coloca a su producto.

⊙ Cada empresa tiene una función de costos $C_i(q_i) = cq_i$

⊙ El precio de mercado es $P = \text{mín}\{p_1, p_2\}$. La empresa con el menor precio captura toda la cantidad demandada.

⊙ Si ambas empresas ponen el mismo precio, ese será el precio de mercado y las empresas comparten en partes iguales la cantidad demandada.

⊙ La cantidad demandada está dada por la demanda

$$Q = \text{máx}\left\{\frac{a-P}{b}, 0\right\}$$

con $c < a$

Duopolio de Bertrand

- El pago de cada empresa es su beneficio, para la empresa 1:

$$\pi_1(p_1, p_2) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad p_1 > p_2 \\ \text{máx}\left\{\frac{a-p_1}{b}, 0\right\}(p_1 - c) & \text{si} \quad p_1 < p_2 \\ \frac{1}{2}\,\text{máx}\left\{\frac{a-p_1}{b}, 0\right\}(p_1 - c) & \text{si} \quad p_1 = p_2 \end{cases}$$

- La empresa 1 hace beneficio positivo si $p_1 \leqslant p_2$ y $c < p_1 < a$
- La empresa 1 hace beneficio nulo si $p_1 > p_2$ o $p_1 \geqslant a$ o $p_1 = c$
- La empresa 1 hace beneficio negativo si $p_1 \leqslant p_2$ y $p_1 < c$

Duopolio de Bertrand

- Buscaremos el EN por inspección (Opción 1):

⊙ En un EN ninguna empresa puede estar haciendo beneficios negativos.

- Cualquier empresa puede asegurarse un beneficio nulo tomando $p_i \geq a$

⊙ En un EN no puede haber una empresa con beneficio nulo y otra con beneficio positivo.

- La de beneficio nulo puede cambiar su precio al de la otra y obtener beneficio positivo.

Duopolio de Bertrand

- En un EN ambas empresas no pueden estar haciendo beneficio positivo.

⊙ Este caso tiene que ser con $c < p_2 = p_1 < a$:

- Tenemos $\pi_1(p_1, p_2) = \frac{a-p_1}{2b}(p_1 - c) > 0$, si la empresa 1 cambia a $p_1' = p_1 - \epsilon < p_2$ (baja ligeramente su precio y captura toda la cantidad demandada), tendría un pago $\pi_1(p_1 - \epsilon, p_2) = \frac{a-p_1+\epsilon}{b}(p_1 - \epsilon - c)$
- Para que esta desviación sea provechosa para la empresa 1 se debe cumplir:

$$\frac{a - p_1 + \epsilon}{b}(p_1 - \epsilon - c) > \frac{a - p_1}{2b}(p_1 - c)$$

condición que se simplifica en:

$$-2\epsilon^2 + 2\epsilon(a + c - 2p_1) + (a - p_1)(p_1 - c) > 0$$

- Para $\epsilon > 0$ "suficientemente pequeño" se cumple la condición
- No puede ser EN.

Duopolio de Bertrand

- La única posibilidad que queda es que el EN sea con ambas empresas haciendo beneficio nulo.

- Esto se puede dar en los siguientes casos
  - Ambas empresas con precios por encima de a. En este caso cualquiera de las empresas que baje su precio por debajo de a (pero todavía por encima de c) pasaría a tener beneficio positivo. No es EN.
  - Una empresa tiene precio por encima de a y la otra igual a c. En este caso la empresa con precio igual a c puede aumentarlo y capturar una cantidad positiva con un margen positivo y hacer beneficio positivo.
  - Ambas empresas con precio igual a c: $p_1 = p_2 = c$. En este caso caso ambas empresas capturan una cantidad demandada positiva pero su margen es nulo. Cualquiera que aumente su precio seguirá con beneficio nulo, la cantidad que capture será cero. Cualquiera que baje su precio pasará a tener beneficio nulo. **Tenemos (él) EN**

Duopolio de Bertrand

- Buscaremos el EN por inspección (Opción 2):

⊙ Si $c < p_2 < p_1 \leqslant a$:

- Tenemos $\pi_1(p_1, p_2) = 0$, si la empresa 1 cambia a $p_1' = p_2$ tendría un pago $\pi_1(p_2, p_2) = \frac{a-p_2}{2b}(p_2 - c) > 0$
- No puede ser EN.

⊙ Si $c = p_2 < p_1 \leqslant a$:

- Tenemos $\pi_2(p_1, p_2) = 0$, si la empresa 2 cambia a $p_2' = p_1 - \epsilon$ tendría un pago $\pi_2(p_1, p_1 - \epsilon) = \frac{a-p_1+\epsilon}{b}(p_1 - \epsilon - c) > 0$
- No puede ser EN.

Duopolio de Bertrand

- Si $c < p_2 = p_1 < a$:
  - Tenemos $\pi_1(p_1, p_2) = \frac{a-p_1}{2b}(p_1 - c) > 0$, si la empresa 1 cambia a $p_1' = p_1 - \epsilon < p_2$ (baja ligeramente su precio y captura toda la cantidad demandada), tendría un pago $\pi_1(p_1 - \epsilon, p_2) = \frac{a-p_1+\epsilon}{b}(p_1 - \epsilon - c)$
  - Para que esta desviación sea provechosa para la empresa 1 se debe cumplir:

$$\frac{a - p_1 + \epsilon}{b}(p_1 - \epsilon - c) > \frac{a - p_1}{2b}(p_1 - c)$$

condición que se simplifica en:

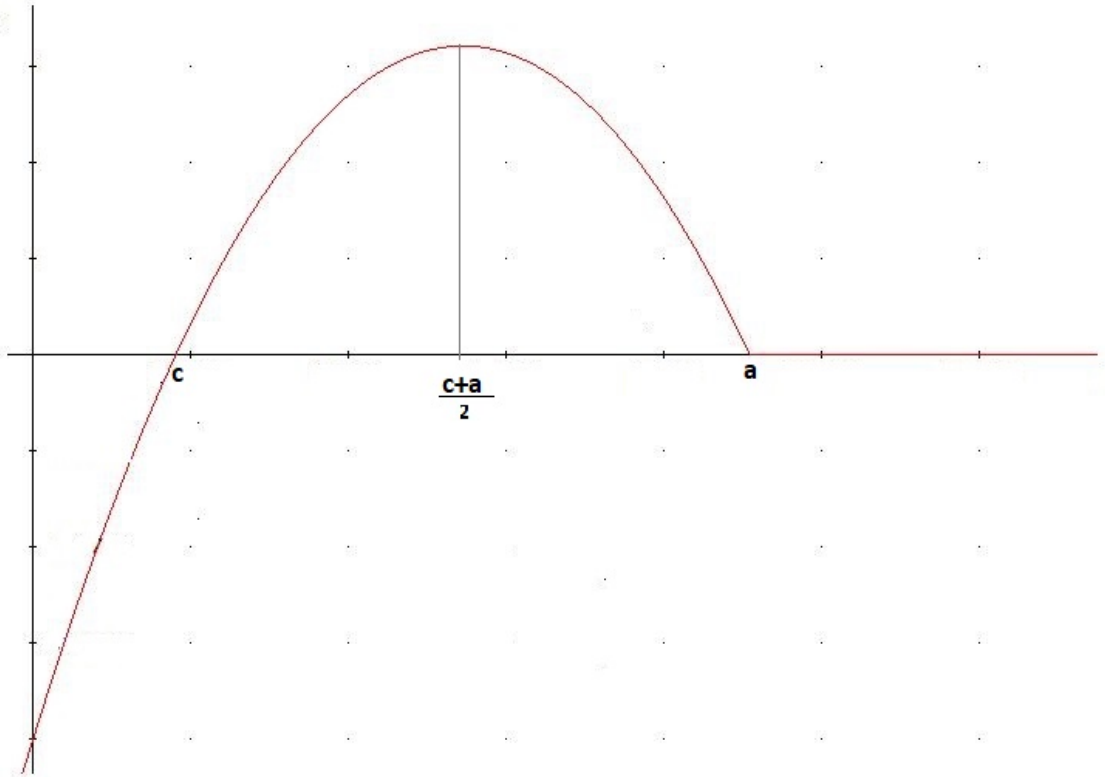
$$-2\epsilon^2 + 2\epsilon(a + c - 2p_1) + (a - p_1)(p_1 - c) > 0$$

  - Para $\epsilon > 0$ "suficientemente pequeño" se cumple la condición
  - No puede ser EN.

Duopolio de Bertrand

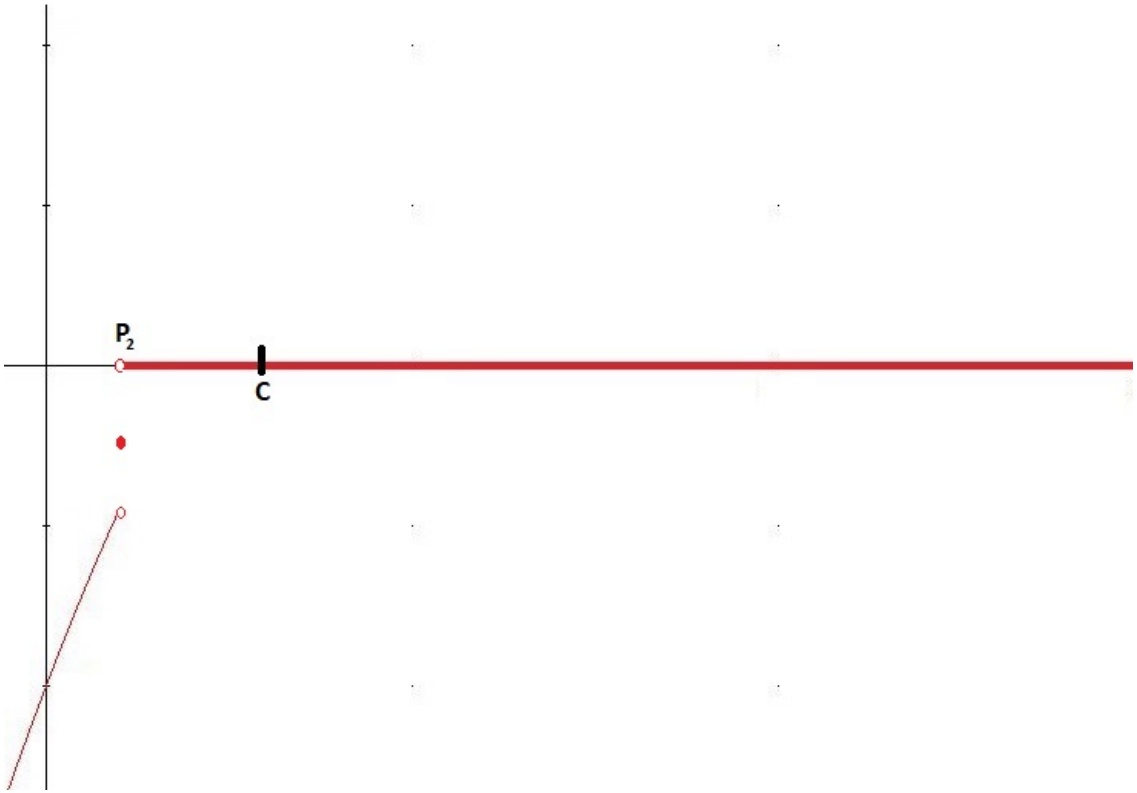
- Si $c < p_2 = p_1 = a$:
  - Ambas empresas tienen beneficio nulo, si la empresa 1 baja su precio a $p_1' = a - \epsilon$ tendría un beneficio $\pi_1(a - \epsilon, a) = \frac{a-a+\epsilon}{b}(a - \epsilon - c) > 0$ para $\epsilon > 0$ "suficientemente pequeño".
  - No puede ser EN.
- Si $c = p_2 = p_1 < a$:
  - Ambas empresas tienen beneficio nulo, cualquiera que lo suba seguiría teniendo beneficio nulo.
  - Es un (él!) EN.

- Finalmente también podemos encontrar el EN por mejores respuestas.
- Veamos la MR de la empresa 1 a la empresa 2.
- El beneficio dado por máx $\left\{\frac{a-p_1}{b}, 0\right\}(p_1 - c)$ tiene una gráfica:



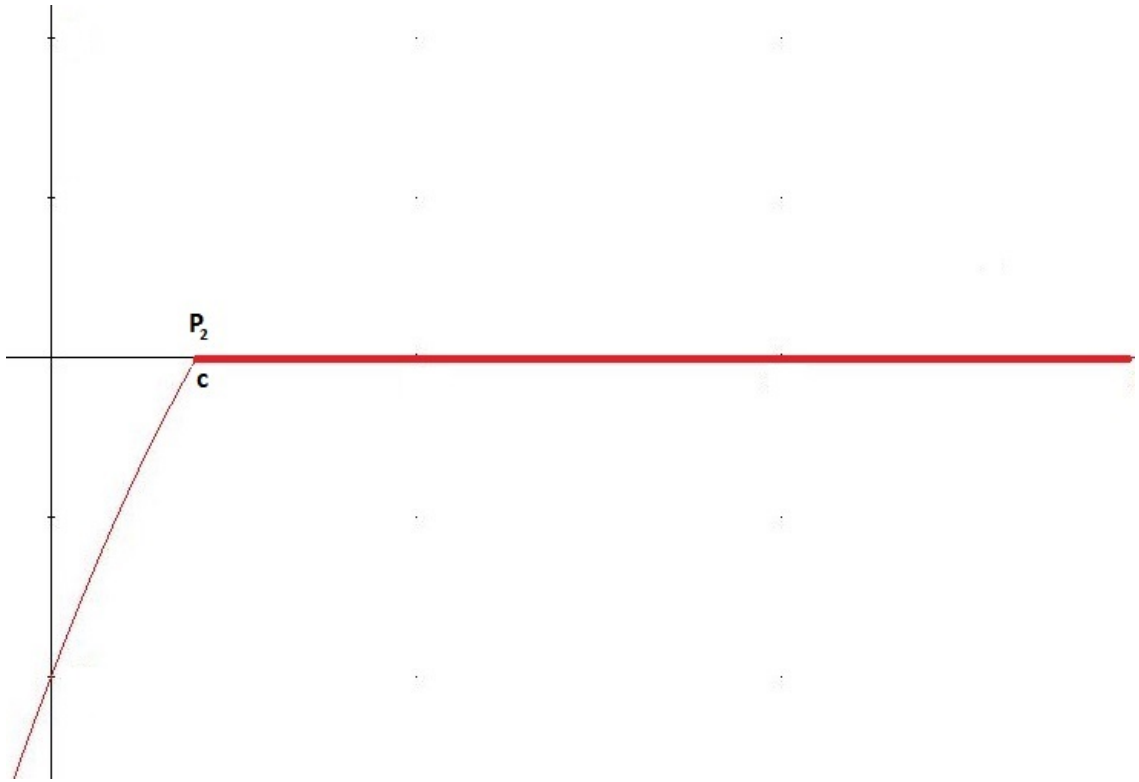
- El pago de la empresa 1 dependerá también del precio de la empresa 2:

- Si el precio de la empresa 2 es $p_2 < c$, el pago de la empresa 1 es:



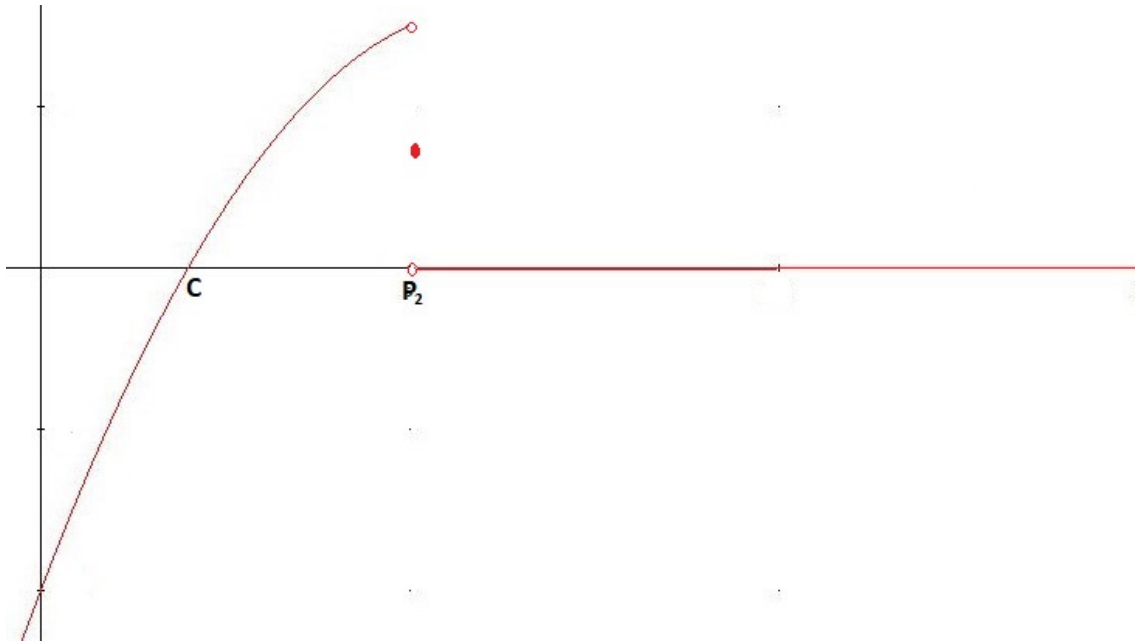
- En este caso, la empresa 1 maximiza su pago con cualquier $p_1 > p_2$.
- Tenemos $MR_1(p_2) =]p_2, +\infty[$ si $p_2 < c$

- Si el precio de la empresa 2 es $p_2 = c$, el pago de la empresa 1 es:



- En este caso, la empresa 1 maximiza su pago con cualquier $p_1 \geq p_2 = c$.
- Tenemos $MR_1(p_2) = [c, +\infty[$ si $p_2 = c$

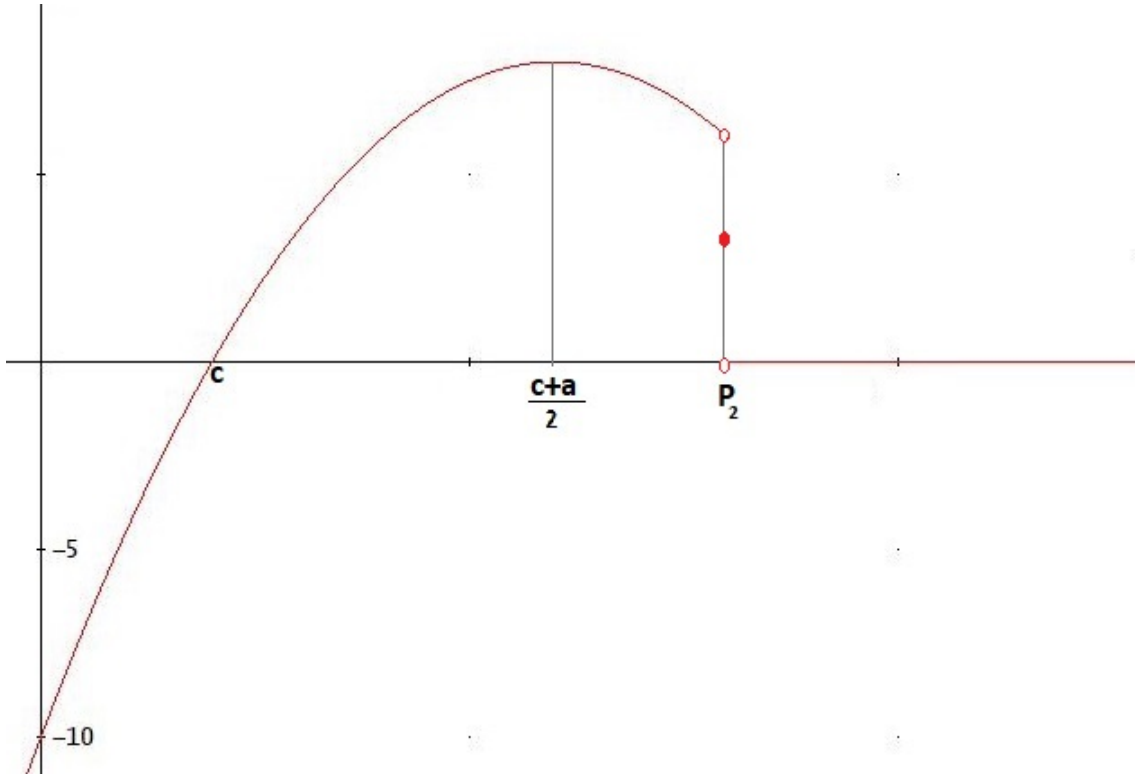
- Si el precio de la empresa 2 es $c < p_2 \leqslant \frac{a+c}{2}$, el pago de la empresa 1 es:



⊙ En este caso, la empresa 1 maximiza su pago con un p_1 "un poquito menor a p_2". ≀ Pero como estamos considerando el espacio de los precios un continuo, en realidad no existe un p_2 que maximice el pago de la empresa 1 en este caso.

⊙ Tenemos $MR_1(p_2) = \emptyset$ si $c < p_2 \leqslant \frac{a+c}{2}$

- Si el precio de la empresa 2 es $\frac{a+c}{2} < p_2$, el pago de la empresa 1 es:



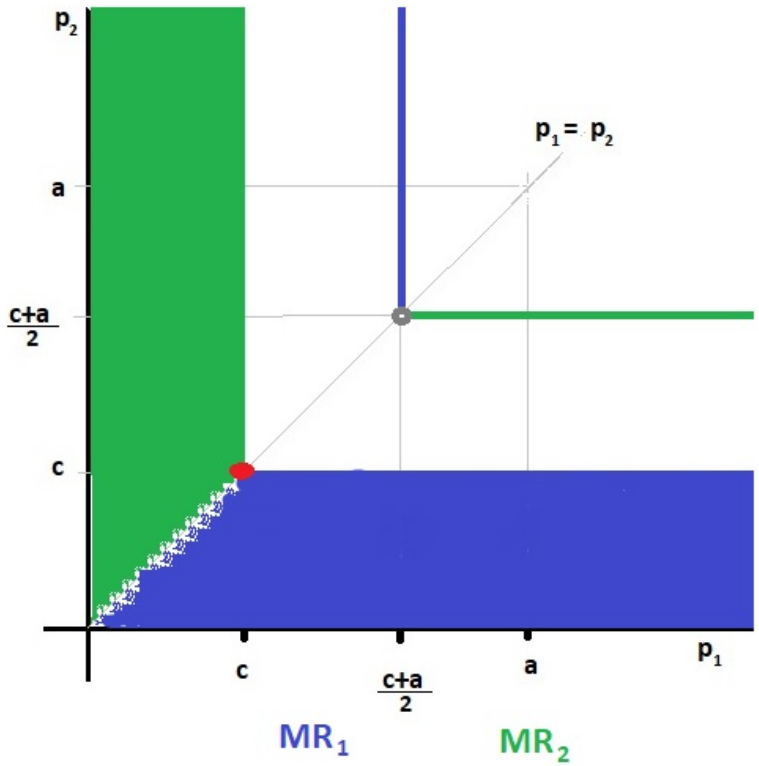
- En este caso, la empresa 1 maximiza su pago con un $p_1 = \frac{c+a}{2}$
- Tenemos $MR_1(p_2) = \frac{a+c}{2}$ si $\frac{a+c}{2} < p_2$

- Resumiendo la mejor respuesta de la empresa 1 es:

$$MR_1(p_2) = \begin{cases}]p_2, +\infty[& \text{si} \quad p_2 < c \\ [c, +\infty[& \text{si} \quad p_2 = c \\ \emptyset & \text{si} \quad c < p_2 \leqslant \frac{a+c}{2} \\ \frac{a+c}{2} & \text{si} \quad \frac{a+c}{2} < p_2 \end{cases}$$

- Para la empresa 2 su mejor respuesta es similar.

- SI bien se puede analizar con las fórmulas el punto donde coinciden las mejores respuestas, es más fácil verlo gráficamente:



⊙ Donde vemos que el único punto en común es $(c.c)$, el EN.